

Elektrodynamik

Christian Andersen

15. juni 2010

Indhold

Indhold	1
1 Indledning	3
2 Elektrostatik	3
2.1 Det elektriske felt	3
2.2 Divergens og Curl af E-felter	3
2.3 Elektrisk potential	4
2.4 Randbetingelser	4
2.5 Arbejde og Energi i elektrostatik	5
2.6 Ledere	5
2.7 Kapacitor	6
3 Specielle teknikker	6
3.1 Laplaces Ligning	6
3.2 Billede-metoden	6
3.3 Separation af de variable	7
3.4 Multipol ekspansion	7
4 Elektriske felter i stof	8
4.1 Polarisation	8
4.2 Det elektriske felt af et polariseret objekt	9
4.3 Den elektriske forskydning	9
4.4 Lineær Dielektricitet	9
5 Magnetostatik	10
5.1 Lorentz Kraften	10
5.2 Biot-Savarts lov	10
5.3 Divergens og Curl af B	11
5.4 Magnetisk vektorpotential	11
5.5 Randbetingelser	12
5.6 Multipol ekspansion af Vektorpotential	12

6	Magnetiske Felter i Stof	12
6.1	Magnetisering	12
6.2	Det magnetiske felt i et magnetiseret objekt	13
6.3	Hjælpefeltet H	13
6.4	Lineære magnetiske materialer	14
7	Elektrodynamik	14
7.1	Den elektromotoriske kraft	14
7.2	Elektromagnetisk Induktion	15
7.3	Maxwells ligninger	15
8	Bevarelseslove	16
8.1	Ladning og energi	16
9	Elektromagnetiske bølger bølger	17
9.1	Bølger i en dimension	17
9.2	Polarisation	17
9.3	Elektromagnetiske bølger i vakuum	18
9.4	Elektromagnetiske bølger i stof	18
9.5	Refleksion og transmission af lys	19
9.6	Elektromagnetiske bølger i ledere	20
9.7	Guidede bølger	21
10	Potentialer og felter	21
10.1	Gauge Transformationer	21
10.2	Kontinuerte fordelinger og retarderede potentialer	22
10.3	Punktladninger	23
11	Stråling	23
11.1	Dipolstråling	23

1 Indledning

Lang og kedelig indledning du alligevel ikke læser.

2 Elektrostatik

2.1 Det elektriske felt

I elektrostatik er det fundamentale postulat **Coulomb's lov**, der giver kræften på ladningen Q fra ladningen q med afstanden mellem sig på z

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2} \hat{z} \quad (2.1)$$

Herudfra kan man finde det elektriske felt da

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad (2.2)$$

så hvis man har en mængde af n punktladninger bliver det samlede elektriske felt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{z_i^2} \hat{z}_i \quad (2.3)$$

Har man i stedet kontinuerte ladninger bliver \mathbf{E} -feltet udtryk ved et integral i stedet. For en ladningsfordeling λ langs en linje

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{z^2} \hat{z} dl' \quad (2.4)$$

og for en overfladeladning

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{z^2} \hat{z} da' \quad (2.5)$$

og VIGTIGST for en volumenladning ρ har vi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{z^2} \hat{z} d\tau' \quad (2.6)$$

2.2 Divergens og Curl af \mathbf{E} -felter

Her har vi Gauss lov der siger at den elektriske flux $\Phi_E = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ afhænger af den indesluttede ladning, dvs den ladning der ligger inde i \mathcal{S}

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

Dette kan ofte bruges til at finde \mathbf{E} -feltet, specielt hvis der er smarte symmetrier der kan bruges. Dette medfører også Gauss lov i differentialform

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.8)$$

Kigger man på et lukket linje-integral i \mathbf{E} -feltet ser man at

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.9)$$

hvilket medfører at

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.10)$$

2.3 Elektrisk potential

Når det elektriske felt er rotationsfrit kan man skrive det som gradienten af en potentialefunktion

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.11)$$

og man kan udregne det elektriske potentiale

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.12)$$

hvor \mathcal{O} er et valgt nulpunkt for potentialet. Vælges typisk til at være uendeligt. Sammensætter man nu curl og divergensligningen for \mathbf{E} -feltet får man Poissons ligning

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

og når $\rho = 0$ har man Laplaces ligning

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.14)$$

hvilket giver gode måder at regne potentialet på. Mere om dette senere. Kigger man nu blot på en enkelt ladning ser man at

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \quad (2.15)$$

og hvis man har en volumenladning

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{z} d\tau' \quad (2.16)$$

2.4 Randbetingelser

Har man en overfladeladning med ladningen σ vil \mathbf{E} -feltet påvirkes af denne. Forskellen på feltet over og under er givet ved

$$E_{above}^{\perp} - E_{below}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E}_{above}^{\parallel} - \mathbf{E}_{below}^{\parallel} = 0 \quad (2.18)$$

Potentialet ændres dog ikke ved en overfladeladning dvs

$$V_{above} = V_{below} \quad (2.19)$$

men da $\mathbf{E} = -\nabla V$ får vi

$$\frac{\partial V_{above}}{\partial n} - \frac{\partial V_{below}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (2.20)$$

hvor $\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}}$

2.5 Arbejde og Energi i elektrostatik

For en samling punktpartikler er ind i en konfiguration skal der bruges følgende energi (hvis $V = 0$ i uendelig)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i) \quad (2.21)$$

Har man en kontinuert distribution i stedet har man at energien af hele systemet er

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau \quad (2.22)$$

og for en linje- og overfladeladning har man $\frac{1}{2} \int \lambda V dl$ og $\frac{1}{2} \int \sigma V da$. Man kan også omskrive dette til

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau \quad (2.23)$$

hvor $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. Bemærk desuden at man ved den sidste formel regner HELE energien i et system, men man i ligning (2.21), kun regner energien der bruges på at samle systemet.

Har man nu to systemer med energi W_1 og W_2 og med elektrisk felt \mathbf{E}_1 og \mathbf{E}_2 har man at den samlede energi er

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int_{\text{all space}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \quad (2.24)$$

2.6 Ledere

Inde i en elektrisk leder er $\mathbf{E} = 0$ og $\rho = 0$. Det betyder at enhver ladning ser på overfladen. Desuden er en leder et equipotential. Dvs at V er konstant ind i lederen. Kigger man lige uden for en leder er \mathbf{E} -feltet vinkelret på overfladen.

Har man en overfladeladning på en tynd leder kan man snakke om elektrisk kraft herpå fra et \mathbf{E} -felt der bliver lagt over. Dvs at det elektriske tryk på overfladen er

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (2.25)$$

eller udtryk ved feltet lige uden for overfladen

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.26)$$

2.7 Kapacitor

Snakker man ledere må kan også snakke om kapacitorer. Har man to leder med ladningerne $+Q$ og $-Q$ med potetialeforskellen V vil kapaciteten af systemet være givet ved

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.27)$$

Man kan så oplade en kapacitor med ladningen $Q = CV$ og energien dette kræver er

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \quad (2.28)$$

3 Specielle teknikker

3.1 Laplaces Ligning

Det gælder her om at løse Laplaces ligning for at finde potentialet V , da $\rho = 0$ næsten overalt. Så vi har

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.1)$$

I én dimension giver dette os

$$V(x) = mx + b \quad (3.2)$$

hvor konstanterne m og b bestemmes ud fra randbetingelserne. Har vi to dimensioner ikke lige til men vi har at i et punkt (x, y) er potentialet middelværdien af det omkringliggende potentiale

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{circle} V dl \quad (3.3)$$

og i tre dimensioner gælder det samme

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{sphere} V da \quad (3.4)$$

3.2 Billede-metoden

Da V er entydigt, betyder det at hvis man kan finde et V der opfylder grænsebetingelserne og som opfylder laplace-lov, så er det et gyldigt potentiale. Det kan bruges hvis man har ladning overfor en ledende overflade, hvor der så vil induceret overfladeladning. Ved at spejle ladningen i overfladen og kan problemet løses nemmere.

3.3 Separation af de variable

I cartetiske koordinater kan man kigge efter løsning på formen

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.5)$$

hvilket ved løsning af Laplace-ligning medfører at

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky \quad (3.6)$$

så man får

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \quad (3.7)$$

Konstanterne A , B , C og D bestemmes nu ud fra grænsebetingelserne. Det skal sige at man her ofte får noget med $k = \frac{n\pi}{a}$, pga cos og sin. Den generelle vil være en linear kombination af disse, hvis man ikke vha. grænsebetingelserne kan udelukke nogle af disse.

Man kan lave det samme trick for sfæriske koordinater, hvis der er ϕ -symmetri, hvor man finder den generelle løsning

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.8)$$

Hvor P_l er Legendre polynomierne og konstanterne A_l og B_l bestemmes ud fra grænsebetingelserne. Man kan se at ofte forsvinder A_l eller B_l , da potentiallet ellers ville blive uendeligt i nogle af grænserne, hvilket ofte ikke ønskes.

Husk i begge tilfælde at både sin, cos og legendre polynomier er fuldstændige ortonormalsæt, hvilket betyder at man kan bruge Fouriers Trick til at finde koefficienter.

3.4 Multipol ekspansion

Kigger man på en ladningsfordeling \mathcal{V} kan man opskrives potentialet som

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\mathcal{V}} (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.9)$$

Dette kaldes multipolekspansionen for V , hvor $n = 0$ -leddet er monopolleddet, $n = 2$ er dipol, $n = 3$ er quadropol osv.

Når man er langt væk kan man negligere led af højere orden. Ofte er det laveste ikke-nul led en meget god approksimation. Man ser at monopoledet bliver

$$V_{mon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.10)$$

hvilket blot er det samme som en punktladning. Det sker dog at den samlede ladning er 0. Her vil det være dipol-leddet der dominere

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathcal{V}} r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.11)$$

Dipolmomentet for en ladningsfordeling er givet ved

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.12)$$

så man kan skrive potentialet som

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.13)$$

Dipolmomentet for en fordeling af ladninger kan skrives som $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \mathbf{r}'_i$ og for den fysisk dipol har man

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (3.14)$$

hvor \mathbf{d} er afstandsvektoren mellem de to ladninger gående fra den negative til den positive. Man kan også regne \mathbf{E} -feltet af en dipol

$$\mathbf{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.15)$$

4 Elektriske felter i stof

4.1 Polarisation

Lægger man et elektrisk felt over et atom vil den have et dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (4.1)$$

Det kan opfattes som en masse små dipoler. Har man en elektrisk dipol $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ vil denne i et elektrisk felt blive

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (4.2)$$

og kræften på dipolerne vil blive

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (4.3)$$

Man definerer nu polarisationen af et materiale som

$$\mathbf{P} = \text{elektrisk dipolmoment per volumen enhed} \quad (4.4)$$

4.2 Det elektriske felt af et polariseret objekt

Man kan finde potentialet for et objekt med polarisationen \mathbf{P}

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b}{z} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{z} d\tau' \quad (4.5)$$

med den bundne overfladeladningstæthed

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.6)$$

og den bundne ladningstæthed

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.7)$$

4.3 Den elektriske forskydning

Inde i et dielektrikum er den totale ladningstæthed

$$\rho = \rho_b + \rho_f \quad (4.8)$$

Vi kan nu definere den elektriske forskydning

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.9)$$

og får gauss lov for stof

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (4.10)$$

eller på integralform

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f,encl}$$

Vi kan nu finde randbetingelserne i tilfælde af en overfladeladning. Så er

$$D_{above}^\perp - D_{below}^\perp = \sigma_f \quad (4.11)$$

$$\mathbf{D}_{above}^\parallel - \mathbf{D}_{below}^\parallel = \mathbf{P}_{above}^\parallel - \mathbf{P}_{below}^\parallel \quad (4.12)$$

mens randbetingelserne for \mathbf{E} -feltet er præcist det samme som tidligere nævnt.

4.4 Lineær Dielektricitet

Et materiale kan være lineær dielektrisk, hvis man ligger et \mathbf{E} -felt over får man polarisationen

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (4.13)$$

Hvilket betyder at

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.14)$$

med $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$. Man bruger også nogle gange den relative permabilitet $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$. Vi kan også finde energien i et dielektrisk system

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{all space}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (4.15)$$

5 Magnetostatik

5.1 Lorentz Kraften

Hvis vi har en ladning Q der bevæger sig med hastigheden \mathbf{v} i et magnetisk felt \mathbf{B} vil det påvirkes af Lorentz Kraften

$$\mathbf{F}_{mag} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

Hvis man også har et \mathbf{E} -felt er kraften

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.2)$$

En vigtig ting at bemærke er at **den magnetiske kraft udfører intet arbejde**.

Har man nu en strøm, dvs. bevægende ladninger, langs en linje \mathcal{P} , $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$ bliver den magnetiske kraft

$$\mathbf{F}_{mag} = \int_{\mathcal{P}} I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.3)$$

Man snakker også ofte om strømtætheder $\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}$, og så bliver

$$\mathbf{F}_{mag} = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\tau \quad (5.4)$$

En ting man ser er at ligger man en flade \mathcal{S} vil strømmen igennem denne være

$$I = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.5)$$

og man ser at

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.6)$$

5.2 Biot-Savarts lov

Når man har en konstant strøm er $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ og så fælder Biot-Savarts lov

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{P}} \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\mathcal{P}} \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.7)$$

og hvis man har en volumen- eller overfladestrøm har man

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} d\tau' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} da' \quad (5.8)$$

5.3 Divergens og Curl af B

Hvis man har en lang lige leder med strøm I kan man finde at \mathbf{B} -feltet for denne er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2s\pi} \hat{\phi} \quad (5.9)$$

Man kan så betragte en strømtæthed \mathbf{J} , gennem en flade \mathcal{S} med kanten \mathcal{P} , som en bunke lige ledere og finde

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{encl}$$

hvilket gælder helt generelt og vha. Stokes sætning

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.10)$$

hvilket kendes som Amperes lov. Man kan også finde at

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.11)$$

Hvilket i praksis medfører at der ikke findes nogle magnetiske monopoler.

5.4 Magnetisk vektorpotentiale

Når divergensen af \mathbf{B} feltet er nul, kan man skrive \mathbf{B} feltet som

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.12)$$

hvor \mathbf{A} kaldes for vektorpotentialiet. Vi kan nu vælge divergensen af \mathbf{A} som vi har lyst og det er en fordel at vælge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.13)$$

og så får man

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

hvilket giver

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{z} d\tau' \quad (5.14)$$

Dette kan også findes for en line og overfladestrøm

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{P}} \frac{I}{z} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\mathcal{P}} \frac{d\mathbf{l}'}{z} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}}{z} da' \quad (5.15)$$

5.5 Randbetingelser

Hvis man har et tyndt stykke film, hvor der løber en overfladestrøm \mathbf{K} kan man kigger på \mathbf{B} over og under filmem. Det vinkelrette \mathbf{B} -felt ændrer sig ikke

$$B_{above}^{\perp} = B_{below}^{\perp} \quad (5.16)$$

men det parallelle felt ændrer sig

$$B_{above}^{\parallel} - B_{below}^{\parallel} = \mu_0 \mathbf{K} \quad (5.17)$$

hvilket kan samles til

$$\mathbf{B}_{above} - \mathbf{B}_{below} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.18)$$

Vektorpotentialet påvirker ikke af overfladestrømmen

$$\mathbf{A}_{above} = \mathbf{A}_{below} \quad (5.19)$$

5.6 Multipol ekspansion af Vektorpotentiale

man kan opskrive vektorpotentialet for et strømloop som

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l} \quad (5.20)$$

Man ser dog at første led går væk da $\oint d\mathbf{l}' = 0$, så der er ikke magnetiske monopoler. Så det dominerende led bliver dipol-leddet

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' \quad (5.21)$$

eller skrevet med det magnetiske dipolmoment

$$m = I \int d\mathbf{a} = I \mathbf{a} \quad (5.22)$$

får man

$$A_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (5.23)$$

Betragter man nu en ren magnetisk dipol der peger i z-retningen får man at

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (5.24)$$

og man får så det magnetiske felt til at blive

$$\mathbf{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5.25)$$

6 Magnetiske Felter i Stof

6.1 Magnetisering

Et stof kan magnetiseres paramagnetisk, diamagnetisk og ferromagnetisk. Para retter sig ind i samme retning som et B-felt og dia retter sig modsat. Ferro beholder

magnetisering hele tiden. For en kreds med dipolmoment m vil den påvirkes af et kraftmoment

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

og har man et infinitesimal-loop vil kraften den bliver påvirkes med

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.2)$$

Hvilket f.eks. kunne være et atom, som har dipolmomentet

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}} \quad (6.3)$$

Som når der bliver lagt et magnetfelt over vil ændre sig

$$\Delta\mathbf{m} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}\mathbf{B} \quad (6.4)$$

Man kan nu betragte et stof af en hel masse små dipoler. Man definerer derfor magnetiseringen som

$$\mathbf{M} = \text{magnetisk dipolmoment per volumen enhed} \quad (6.5)$$

6.2 Det magnetiske felt i et magnetiseret objekt

I et objekt med magnetiseringen \mathbf{M} vil vektorpotentialet være

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{z}}}{z^2} d\tau' \quad (6.6)$$

eller skrevet op som

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{z} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{z} da' \quad (6.7)$$

med den bundne volumenstrøm

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (6.8)$$

og den bundne overfladestrøm

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.9)$$

6.3 Hjælpefeltet \mathbf{H}

Man kan definere hjælpefeltet \mathbf{H} som

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (6.10)$$

og så bliver ampères lov

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad (6.11)$$

hvor \mathbf{J}_f er den frie strømtæthed. Denne kan også skrives på integralform

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f, \text{encl}} \quad (6.12)$$

husk også at

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (6.13)$$

Randbetingelserne for \mathbf{H} siger

$$\mathbf{H}_{\text{above}} - \mathbf{H}_{\text{below}} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.14)$$

6.4 Lineære magnetiske materialer

Har man et lineært magnetiske materiale gælder

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.15)$$

og

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (6.16)$$

hvilket medfører at inde i et homogent lineært materiale er

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{J}_f \quad (6.17)$$

7 Elektrodynamik

7.1 Den elektromotoriske kraft

Vi har Ohm's lov

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (7.1)$$

hvilket medfører at

$$V = IR \quad (7.2)$$

hvor $R \propto \sigma$. For konstante strømme og uniform konduktivitet gælder

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.3)$$

Der gælder også Joules varme lov, som er den effekt der går tabt når strømmen I løber gennem modstanden R

$$P = VI = I^2 R \quad (7.4)$$

Har vi nu et batteri sluttet til en strømkreds \mathcal{P} , vil den elektriske motoriske kraft, være integralet af kraften, \mathbf{f}_s , som batteriet yder hele vejen rundt

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (7.5)$$

Har man nu f.eks. et perfekt batteri (spændingsforskel V) vil den elektromotoriske kraft fra batteriet ene ende til den anden, dvs fra a til b , er

$$V = \mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.6)$$

Man kan så finde at den elektrimotoriske kraft for en strømkreds i et B -felt blive

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (7.7)$$

7.2 Elektromagnetisk Induktion

Faradays lov siger at

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.8)$$

Induktansen mellem to strømloop (1 og 2) betegnes M_{21} og er givet ved Neumann's formel

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{z} \quad (7.9)$$

ændrer man så strømmen i loop 1 vil den elektrimotoriske kraft i 2 være

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (7.10)$$

Ændrer man strømmen i et loop vil der også blive induceret en emf i loopet selv bestemt af selvinduktansen L , således at

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.11)$$

Man kan nu finde den energi der tager at opbygge en strøm I i en strømkreds

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (7.12)$$

Løber strømmen I i volumen \mathcal{V} med strømtætheden \mathbf{J} vil der være et \mathbf{B} -felt med vektorpotentialiet \mathbf{A} og man kan finde energi fra før ud fra dette

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{all space}} B^2 d\tau \quad (7.13)$$

7.3 Maxwells ligninger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.17)$$

Dette er maxwell ligninger, hvor der i amperes lov (7.17) er tilføjet maxwells egen rettelse så de passer. Denne tilføjelse kaldes flytningsstrømmen

$$\mathbf{J}_d = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.18)$$

På integralform bliver amperes lov så

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{encl} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (7.19)$$

Har man stof gælder Maxwells ligning i stof

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (7.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.23)$$

og på integralform

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f,encl} \quad (7.24)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (7.25)$$

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B \quad (7.26)$$

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f,encl} + \frac{d}{dt} \Phi_D \quad (7.27)$$

8 Bevarelseslove

8.1 Ladning og energi

Da ladning skal bevares gælder for et lukket område med overflade S at

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (8.1)$$

og helt generelt gælder det at

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (8.2)$$

Vi ved at energien i et elektromagnetisk system er

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int_{\text{All Space}} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (8.3)$$

Poyntings sætning siger nu: ”arbejdet fra de elektromagnetiske kræfter er lig med faldet af energi i systemet minus energiflowet fra overfalden”. Dvs

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (8.4)$$

hvor \mathbf{S} er Poyntingvektoren givet ved

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (8.5)$$

Lad nu

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (8.6)$$

betegne den elektromagnetiske energitæthed og u_{mech} den mekaniske energitæthed så gælder relationen

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{mech} + u_{em}) = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (8.7)$$

sammenligninger man denne med (8.2) ser man at formen er præcist det samme og ligesom (8.2) udtrykker ladningsbevarelse så udtrykker denne energibevarelse.

9 Elektromagnetiske bølger bølger

9.1 Bølger i en dimension

Bølger i en dimension kan beskrives ved bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

og den beskriver alle funktioner på formen

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (9.2)$$

hvor g er en bølge der bevæger sig i $+z$ -retningen og h bevæger sig i $-z$ -retningen. Det kunne f.eks. være en sinus kurve på formen

$$f(z, t) = A \cos(kz \pm \omega t + \delta) \quad (9.3)$$

Dette kan med fordel omskrives til en kompleks funktion

$$\tilde{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.4)$$

hvor $\tilde{A} = A e^{i\delta}$. Den "rigtige" bølgefunktion bliver så

$$f(z, t) = \text{Re}(\tilde{f}(z, t)) \quad (9.5)$$

9.2 Polarisation

Kan man skrive en bølge på formen

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \quad (9.6)$$

med $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ siges bølgen at være lineært polariseret i $\hat{\mathbf{n}}$ -retningen.

9.3 Elektromagnetiske bølger i vakuum

Ud fra Maxwells ligninger kan man udlede

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (9.7)$$

hvilket svarer til en bølgeligning med hastighed

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (9.8)$$

som er lig med c , så man ser at elektromagnetiske bølger er lys. Bevæger de elektromagnetiske bølger sig i én retning med fast vinkelfrekvens og ingen xy -afhængighed er de monokromatiske planbølger og kan skrives

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.9)$$

Det gælder også, ud fra Maxwells ligninger, at

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0) \quad (9.10)$$

med andre ord så er \mathbf{B} vinkelret på \mathbf{E} og begge ligger i xy -planen. I en elektromagnetiske bølge gælder der at energitætheden er

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \quad (9.11)$$

og energi flux densiteten er givet ved poyntingventoren

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} c u \hat{\mathbf{z}} \quad (9.12)$$

impulsen af bølgen bliver

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c} u \hat{\mathbf{z}} \quad (9.13)$$

og midler man så over tid bliver middelværdierne

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \qquad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \qquad \langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (9.14)$$

Intensiteten af lys defineres nu til middelværdien af poyntingvektorens værdi, dvs gennemsnitlig energi per areal

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (9.15)$$

9.4 Elektromagnetiske bølger i stof

Laver man udledning fra Maxwells-ligninger i stof får man at også her vil elektriske og magnetiske felter udbrede sig som bølger men nu med hastighed

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n} \quad (9.16)$$

med

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (9.17)$$

hvilket kaldes brydningsindex. I de fleste materialer er $\mu \approx \mu_0$ og så bliver $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$. Intensiteten for bølgen bliver

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2 \quad (9.18)$$

og ved overgang fra et stof til et andet gælder selvfølgelig

$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel \quad (9.19)$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel \quad (9.20)$$

9.5 Refleksion og transmission af lys

Der gælder 3 love for refleksion og transmission.

Første lov: Den indgående, den reflekterede og den transmitterede bølgevektor danner et plan, kaldet indfaldsplanen, hvori normalvektoren til overfladen også ligger

Anden lov: (også kaldet refleksionsloven) Den indgående vinkel er lig med refleksionsvinklen

$$\theta_I = \theta_R \quad (9.21)$$

Tredje lov: (også kaldet Snells lov)

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \quad (9.22)$$

hvor n_1 er brydningsindexet for det materiale lyset kommer fra og n_2 er det transmitteres ind i.

Dette er alt man skal bruge til at finde retningen af det reflekterede lys og det transmitterede lys. Størrelserne finder man ud fra Fresnels ligninger. Har man lys polariseret i indfaldsplanen gælder

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right) \tilde{E}_{0I} \quad (9.23)$$

Transmissionkoefficienterne er givet ved

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad (9.24)$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \alpha\beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad (9.25)$$

Vi kan også have lyset polariseret vinkelret på indfaldsplanen. Så gælder

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right) \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta}\right) \tilde{E}_{0I} \quad (9.26)$$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)^2 \quad T = \frac{I_T}{I_I} = \alpha\beta \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta}\right)^2 \quad (9.27)$$

Vi kan også kigge på specialtilfældet hvor $\theta_I = \theta_R = \theta_T = 0$ og $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Så gælder at

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1}\right) \tilde{E}_{0I} \quad (9.28)$$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (9.29)$$

9.6 Elektromagnetiske bølger i ledere

I en elektrisk leder gælder Ohms lov $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ hvilket vil medføre at når man lyser på lederen vil ladningerne flytte sig så $\rho_f(t) \rightarrow 0$. Man kan så antage at $\rho_f = 0$ og så bølgeligningerne

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.30)$$

der har løsningerne

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.31)$$

med

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}} \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}} \quad (9.32)$$

Disse to samles undertiden til $\tilde{k} = k + i\kappa$. Man kan nu definere skin dybden af et materiale til at være

$$d = \frac{1}{\kappa} \quad (9.33)$$

og man kan finde brydningsindex ved hjælp af k

$$n = \frac{ck}{\omega} \quad (9.34)$$

Maxwells ligninger medfører også at det elektriske felt og det magnetiske felt bliver faseforskudt så

$$\delta_B - \delta_E = \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \quad (9.35)$$

mens amplituderne mellem det elektriske og det magnetiske er givet ved

$$\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}} \quad (9.36)$$

Sender man lys ind på en ledende overflade vil der igen være noget der blev reflekteret og når der blev transmitteret. Det vil opfylde

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}}\right) \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}}\right) \tilde{E}_{0I} \quad (9.37)$$

hvor

$$\tilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2 \quad (9.38)$$

hvilket vil medføre at i en perfekt leder bliver $k_2 = \infty$ og så $\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}$ og $\tilde{E}_{0T} = 0$, dvs at lyset bliver 100% reflekteret med en faseforskydning på 180° . Tilslut skal vi lige have 2 koncepter på plads. En bølges hastighed er givet ved

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (9.39)$$

Men hvis man sender en bølgepakke ind, så vil den ikke nødvendigvis bevæge sig med samme hastighed. Her har vi gruppe hastigheden givet ved

$$v_h = \frac{d\omega}{dk} \quad (9.40)$$

9.7 Guidede bølger

Hvis man har en hul perfekt leder kan denne betragtes som en bølgeguide. Vi er interesseret i bølger der bevæger sig inde i lederen i lederens retning (z -retningen), dvs bølger på formen

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.41)$$

med $\tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y)\hat{\mathbf{y}} + E_z(x, y)\hat{\mathbf{z}}$ og lige ledes for $\tilde{\mathbf{B}}$. Det nye er her at vi ikke nødvendigvis har transversale bølger (dvs z -komponenterne er lig med 0). Generelt skal bølger i en bølgeguide opfylde

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (9.42a)$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (9.42b)$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (9.42c)$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (9.42d)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right) E_z = 0 \quad (9.42e)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right) B_z = 0 \quad (9.42f)$$

Ligningerne bliver væsentlig pænere hvis vi har transversale bølger. Hvis $B_z = 0$ har vi TM (transversale magnetiske) bølger, er $E_z = 0$ har vi TE (transversale elektriske) bølger og når både $E_z = 0$ og $B_z = 0$ har vi TEM (transversale elektromagnetiske) bølger. Det viser sig dog at TEM bølger **ikke** kan eksistere i en hul bølgeguide.

10 Potentialer og felter

10.1 Gauge Transformationer

I elektrodynamik er den generelle løsning til Maxwellsligninger

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (10.1)$$

hvilket minder en smule om dem i elektrostatik. Vektor potentialet og potentialet kan findes ud fra den dynamiske Poisson ligning

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (10.2)$$

og en ligning uden navn

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (10.3)$$

hvilket egentlig er en lidt grim ligning med løser man de to ligninger kan man finde alle felter til enhver situation. Man kan vælge \mathbf{A} som man vil så længe V vælges tilsvarende.

I **Coulomb Gauge** vælges

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (10.4)$$

hvilket betyder at man får

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{z} d\tau' \quad (10.5)$$

Så her kan man nemt finde V . Ligningen for \mathbf{A} bliver dog tilsvarende sværere at løse

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (10.6)$$

Coulomb Gauge bruges ofte i forbindelse med partikelfysik

Man kan også vælge **Lorentz Gauge**. Her vælger man

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (10.7)$$

hvilket medfører

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (10.8)$$

eller blot

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (10.9)$$

med d'Alembertian $\square^2 = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Lorentz gauge bruges ofte i relativistiske sammenhænge.

10.2 Kontinuerte fordelinger og retarderede potentialer

Man kan nu indføre den retarderede tid

$$t_r = t - \frac{z}{c} \quad (10.10)$$

og så får man vha. Lorentz gauge at man kan skrive potentialerne som

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{z} d\tau' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{z} d\tau' \quad (10.11)$$

og herudfra kan man udlede Jefimenkos ligninger

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{z^2} \hat{\mathbf{z}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{cz} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 z} \right] d\tau' \quad (10.12)$$

og

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{z^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{cz} \right] \times \hat{\mathbf{z}} d\tau' \quad (10.13)$$

10.3 Punktladninger

Hvis en punktladning bevæger sig med konstant hastighed bliver felterne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta/c^2)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (10.14)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \quad (10.15)$$

med $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$. Disse reduceres nemt til det elektrostatiske tilfælde hvis $v \ll c$.

11 Stråling

11.1 Dipolstråling

Stråling er den energi der bliver sendt ud fra et elektromagnetisk system. Energien der løber ud gennem en kugle med radius r er givet ved

$$P(r) = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (11.1)$$

og defineres strålingsenergien til at være

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) \quad (11.2)$$

Hvis man har en oscillerende **elektrisk dipol** med to ladningen $q(t) = \pm q_0 \cos(\omega t)$ vil de have et dipolmoment $\mathbf{p} = p_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$ med $p_0 = q_0 d$. Laver man nu approksimationen $d \ll \frac{c}{\omega} \ll r$ bliver potentialerne

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \sin(\omega(t - r/c)) \quad (11.3)$$

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin(\omega(t - r/c)) \hat{\mathbf{z}} \quad (11.4)$$

og felterne bliver

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (11.5)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.6)$$

Denne gennemsnitlige intensitet og stråling bliver så

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (11.7)$$

Har man nu en AC strøm $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i et lille loop med radius b vil det have **magnetisk dipolmoment** $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$. Laver man igen antagelserne $b \ll \frac{c}{\omega} \ll r$ får man at skalar potentialet forsvinder og

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.8)$$

hvilket giver felterne

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.9)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (11.10)$$

Man får så middelenegien og strålingen til at være

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \quad (11.11)$$